Преобразовние Фурье, римановы поверхности и индефинитные метрики

П.Г.Гриневич, С.П.Новиков

Международная конференция, посвященная 90-летию И.М.Халатникова, 22-23 октября, 2009.

http://arxiv.org/e-print/0903.3976
Успехи Математических Наук т.62, № 4 (2009), стр. 45-72.

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН, Россия
и University of Maryland at College Park, College Park, USA

Что такое преобразование Фурье на римановых поверхностях? В каких задачах оно возникает?

Дискретный аналог базисов Фурье-Лорана на римановых поверхностях был построен Кричевером и Новиковым в 1986-1990 гг для операторного квантования замкнутой струны. Идеи этой конструкции были взяты из теории конечнозонных потенциалов в теории солитонов. Римановы поверхности возникают при этом как спектральные кривые операторов.

Непрерывный аналог преобразования Фурье на римановых поверхностях был построен в нашей работе 2003 г.
Недавно нами было доказано (2008-2009), что это преобразовние – изометрия в некоторой индефинитной метрике для $g > 0$ в тех случаях, когда преобразование Фурье имеет хорошие мультипликативные свойства. Соответствующие операторы при этом сингулярны.

Обычное преобразование Фурье:
Базисные функции обладают следующими двумя фундаментальными свойствами:

$\Psi_n(k) = (k)^n$, $x = n \in \mathbb{Z}, |k| = const$ (дискретные)

$\Psi(x,k) = \exp(ikx)$, $x, k \in \mathbb{R}$ (непрерывные)

a) Они образуют ортонормированный базис

b) Закон их умножения градуирован:

$$\Psi_n(k)\Psi_m(k) = \Psi_{m+n}(k), \quad \Psi(x,k)\Psi(y,k) = \Psi(x+y,k)$$

Здесь род римновой поверхности $\Gamma = S^2$ равен 0: $g = 0$. В дискретном случае $\lambda = ik = z^{-1}, \tau = |\log z|$ лежит на "каноническом контуре" κ_c: $\tau = c$ на римановой поверхности. В непрерывном случае $Imk = c$, особый интерес представляет "специальный канонический контур" κ_0.

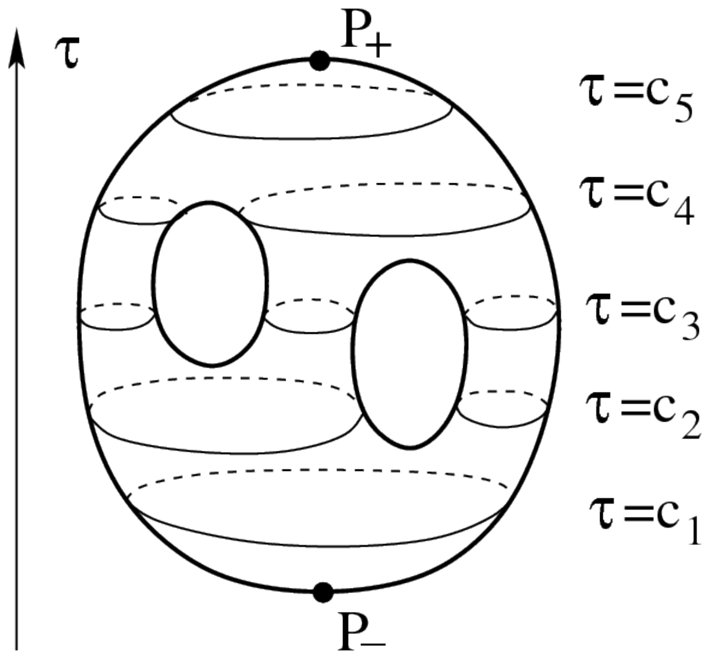
Для непрерывного преобразования Фурье мы будем работать только на таких контурах.

Дискретный случай: базисы Фурье-Лорана на римановых поверхностях .

И.М.Кричевер, С.П.Новиков, 1. “Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов”; 2. “Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского”; 3. “Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях”. ***Функц. анализ и его приложения:*** 21:2 (1987), 46–63; 21:4 (1987), 47–61; 23:1 (1989), 24–40.

4.Krichever I.M., Novikov S.P.,Riemann Surfaces, Operator Fields, Strings. Analogues of Fourier-Laurent bases. In the Memorial Volume of V.Kniznik: Physics and Mathematics of Strings, pp 356-388, Editors L.Brink, D.Friedan, A.Polyakov, World Scientific, Singapore 1990

Струнная диаграмма $(\Gamma, P_+, P_-, k_+, k_-)$:



Здесь $1/k_+$, $1/k_-$ – локальные параметры вблизи “бесконечно удаленных точек ” P_- (”in”) и P_+ (”out”) соответсвенно, dp – мероморфный дифференциал с 2 простыми полюсами в точках P_+, P_-

$dp = dk_+/k_+ + O(1)$,

$dp = -dk_-/k_- + O(1)$

$\mathrm{Re} \oint dp = 0$ по всем замкнутым путям.

Здесь “время” $\tau = \mathrm{Re}\, p$

$\tau(P_+) = +\infty, \tau(P_-) = -\infty$

Аналог дискретных базисов Фурье определен для функций (тензорных полей) на контурах $\kappa_c : -\infty < \tau = c < +\infty$.

Аналог базисов Лорана для голоморфных функций определен для областей между 2 контурами $\kappa_{c'}$ и $\kappa_{c''}$ где $c' < c''$. Все конструкции естественно обощаются на тензорные поля произвольного тензорного веса. Тензорные веса 0,1,-1,2,1/2 особенно важны для теории струн.

Кричевер и Новиков ввели эти базисы при построении операторного квантования бозонной струны. Для этой задачи нужны базисы с хорошими мультипликативными свойствами.

Данные базисы задаются следующими асимптотиками в точках P_+, P_-, где $k_\pm(\lambda) = \infty$:

$$\Psi_j(\lambda) = \begin{cases} k_+^{j+g/2}(c_j^+ + o(1)) & \lambda \to P_+ \\ k_-^{-j+g/2}(c_j^- + o(1)) & \lambda \to P_- \end{cases}$$

(Мы приводим здесь формулы лишь для скалярного случая, $j \in \mathbb{Z}$ для $g = 2s$ и $j \in Z + 1/2$ для $g = 2s + 1$, j достаточно велико.)

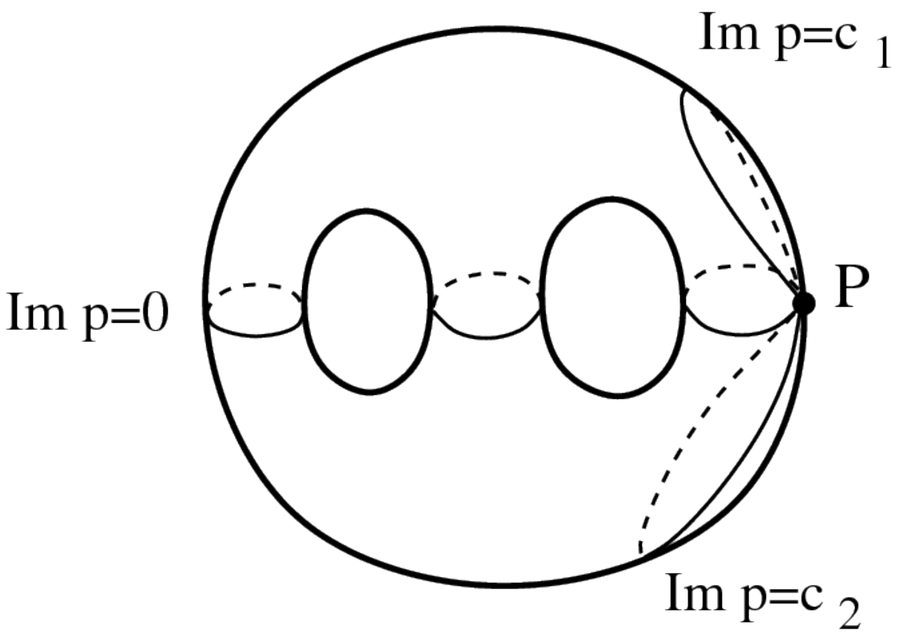
Закон умножения почти градуирован:

$$\Psi_l(\lambda)\Psi_m(\lambda) = \sum_{n=l+m-N}^{n=l+m+N} C_{lm}^n \Psi_m(\lambda).$$

Здесь $N = N(g)$ не завист от l, m, C_{lm}^n не зависят от λ.

Непрерывные аналоги базисов Кричевера-Новикова.

Grinevich P.G., Novikov S.P. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 56, Issue 7 (2003), pp. 956-978.



Обозначим $z = 1/k$ локальный параметр в точке P, dp – мероморфный дифференциал с полюсом второго порядка в точке P

$dp = dk + O(1)$,

$\mathrm{Im} \oint dp = 0$ для всех замкнытых путей.

$\tau = \mathrm{Im}\, p$ корректно определено.

Специальный канонический контур κ_0 задается уравнением $\tau = \mathrm{Im}\, p = 0$.

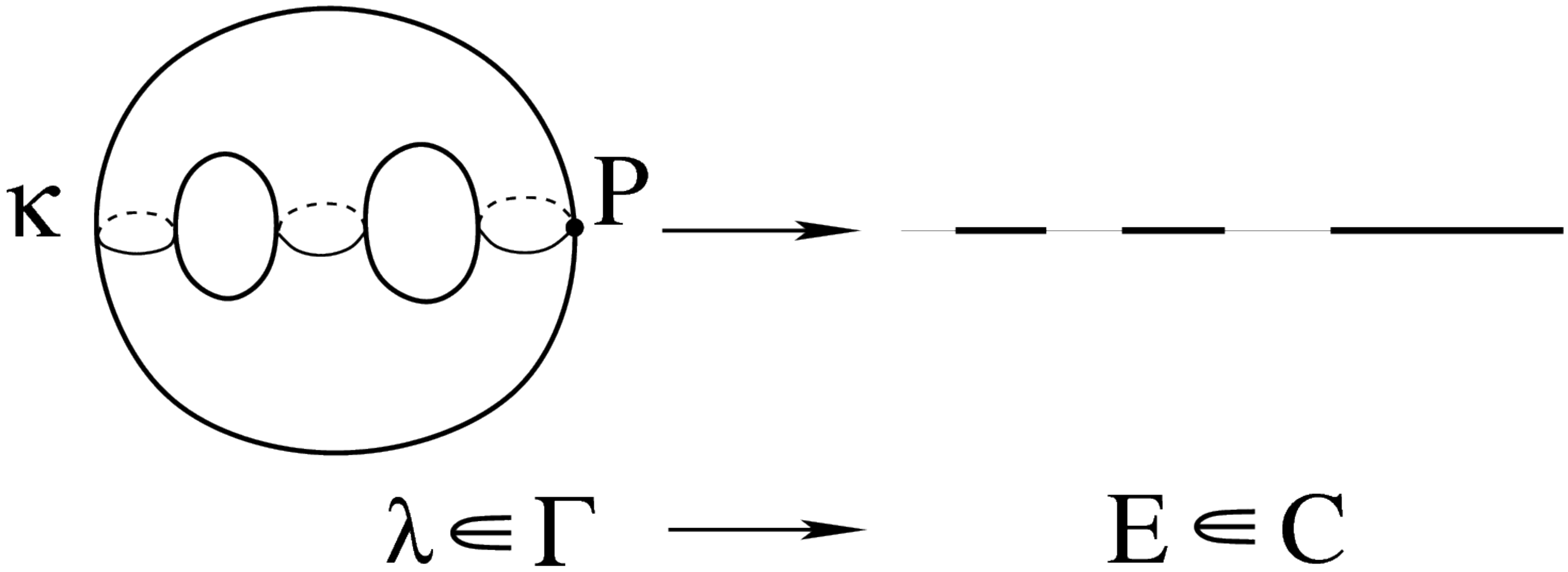
Стандартные данные конечнозонной обратной задачи:

1) Компактная риманова поверхность Γ рода g с "бесконечной" точкой P и локальным параметром $z = 1/k$ в окрестности $P, z(P) = 0$.

2) Набор точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ (полюсов ψ-функции), $D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_g$.

3) "Условия вещественности" на Γ и полюса.

Эти данные были найдены в 1974 году С.П.Новиковым и другими для конечнозонных операторов 2-го порядка и решений КдФ. В этом случае Γ – гиперэллиптическая риманова поверхность (2-листное накрытие λ-плоскости), см. обзор Б.Дубровина, В.Матвеева С.Новикова 1976 г.



Обобщение на произвольные римановы поверхности было найдено И.М.Кричевером в 1976 г. в задаче конечнозонного интегрирования КП, см. обзор И.М.Кричевера в 1977 г.
Отметим, что вычисление Ψ-функции на гиперэллиптических римановых поверхностях в терминах тета-функций Римана в этой статье ошибочно приписано Бейкеру. В действительности, в статье 1928 года Бейкер описал аналитические свойства этой функции и указал, что ответ может быть вычислен с помошью описанной в данной работе техники, однако это вычисление проведено не было. Впервые ответ был выписан А.Р.Итсом в приложении к предыдущему обзору.

Функция Бейкера-Ахиезера определяется следующими аналитическими свойствами:

1) **Функция** $\Psi(\lambda, x)$, $\lambda \in \Gamma$, $x \in \mathbb{R}$ мероморфна на $\Gamma \backslash P$ с простыми полюсами $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, $\Psi(\lambda, x_0) = 1$.

2) $\Psi(\lambda, x) = (1 + o(1)) \exp(ik(x - x_0))$, при $\lambda \to \infty$.

Пусть $g = 0$ и $\Gamma = C \bigcup \infty, P = \infty$. Здесь k – стандартная координата. Тогда $p = k$, $\Psi(\lambda, x) = \exp(ikx)$ – стандартный Фурье-базис на вещественной прямой $\operatorname{Im} k = 0$

Непрерывный аналог базисов Фурье (Grinevich-Novikov, 2003).

Пусть $\gamma_1 = \ldots = \gamma_g = P, x_0 = 0$. Тогда ψ-функции образуют почти градуированную алгебру (здесь $c_0 = 1, c_1 = \zeta(x+y) = \sigma'/\sigma$ для $g = 1$):

$$\Psi(\lambda, x)\Psi(\lambda, y) = \sum_{j=0}^{g} c_j(x, y)\partial_z^j \Psi(\lambda, z)\Big|_{z=x+y}$$

Мы изучаем функции переменной λ, и в данном случае x – параметр, нумерующий базисные функции.

Функции $\Psi(\lambda, x)$ сингулярны по переменной x. Они имеют полюс в точке $x = 0$. Так например, классический периодический оператор Ламе $-\partial_x^2 + g(g+1)\wp(x)$ – специальный случай данной конструкции при всех $g > 0$.

Физическая теория солитонов (КдФ) использует регулярные операторы $-\partial_x^2 + g(g+1)\wp(x + i\omega')$ где $2\omega'$ – мнимый период (“бегущая волна” для $g = 1$).

Наша цель – ответить на следующий вопрос:
Существует ли для таких операторов разумная спектральная теория в пространстве функций на всей x-прямой?
Классические ученые начиная с Эрмита рассматривали лишь задачу на отрезке $[0, T = 2\omega]$ с нулевыми граничными условиями. Для построения преобразования Фурье с хорошими мультипликативными свойствами нам нужна задача на всей прямой.

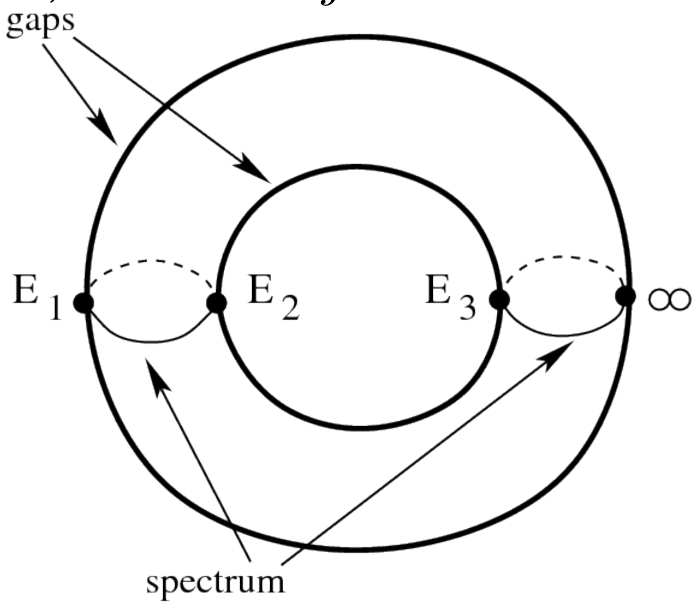
Функции Бейкера-Ахиезера регулярных вещественных периодических операторов никогда не образуют почти градуированных конечнозонных систем при $g > 0$. Поэтому для построения преобразования Фурье необходимо работать с сингулярными операторами.

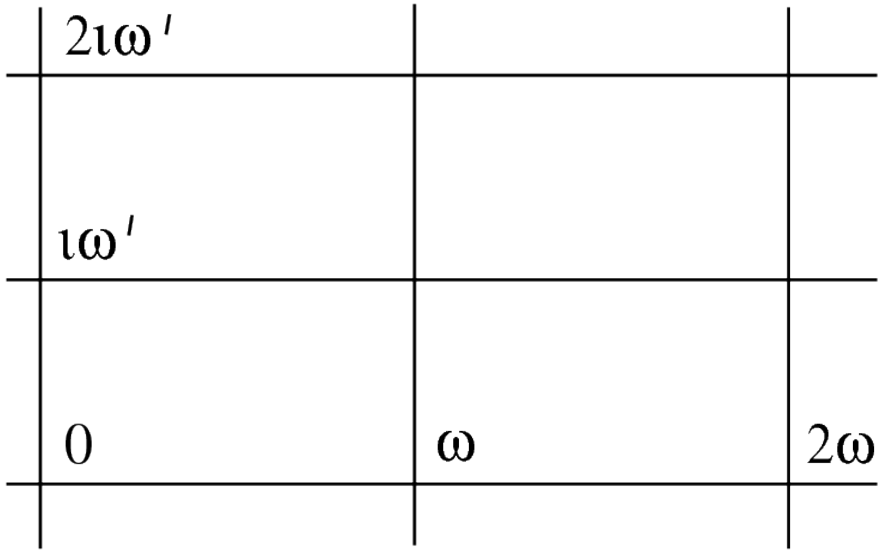
Рассмотрим вещественный конечнозонный (регулярный или сингулярный) оператор

$$L = -\partial_x^2 + u(x).$$

Γ вещественна. Ее уравнение: $\mu^2 = (E - E_1)\cdots(E - E_{2g+1})$.
Обозначим σ перестановку листов: $\sigma(E,\mu) = (E,-\mu), \sigma^2 = \mathrm{id}$
Регулярные операторы строятся по следующим данным:
1) Все E_j вещественны. Пусть $E_1 < E_2 < \ldots < E_{2g+1}$
2) Каждый отрезок $[E_{2j}, E_{2j+1}]$, $j = 1,\ldots,g$ содержит ровно один полюс: $\lambda_j \in [E_{2j}, E_{2j+1}]$, здесь λ_j обозначает проекции точек γ_j на E-плоскость.
Вещественные сингулярные операторы строятся по следующим данным:
1) Γ вещественна, т.е. набор точек ветвления инвариантен относительно комплексного сопряжения. Пусть $\tau(E,\mu) = (\bar{E},\bar{\mu})$, $\tau^2 = \mathrm{id}$.
2) Набор полюсов вещественен (инвариантен относительно τ).

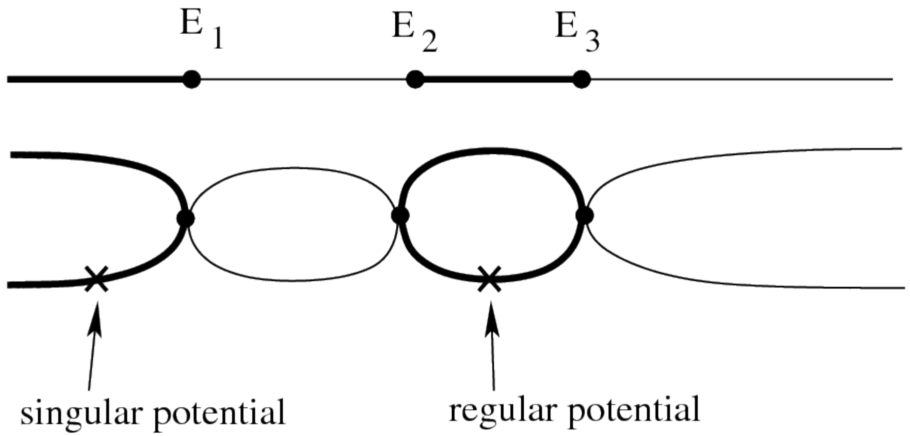
Основные примеры: Пусть $g = 1$ (Γ – тор):
1) Все E_j вещественны, $j = 1, 2, 3$:





Решетка периодов $\wp$-функции Вейерштрасса **вещественна с периодами $2\omega, 2i\omega'$**.

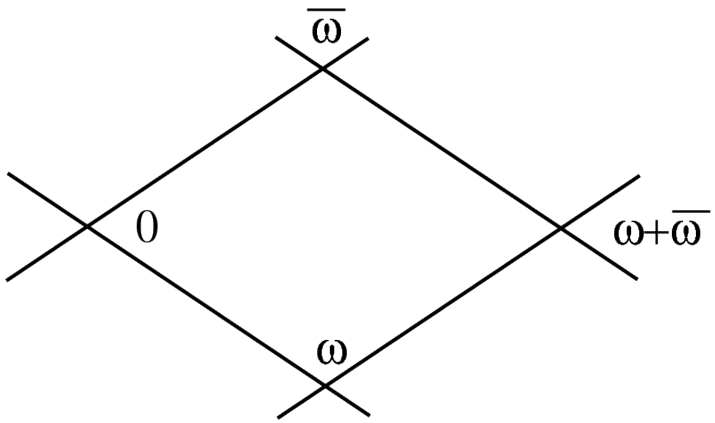
Запрещенные зоны в этом случае – $[-\infty, E_1]$ и $[E_2, E_3]$



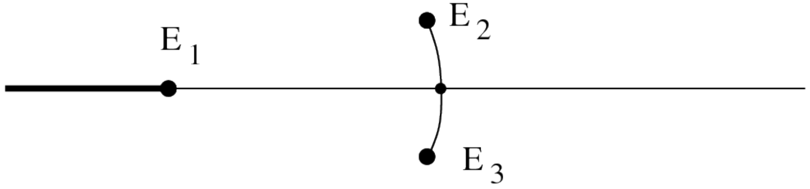
κ_0 нарисован тонкой линией.

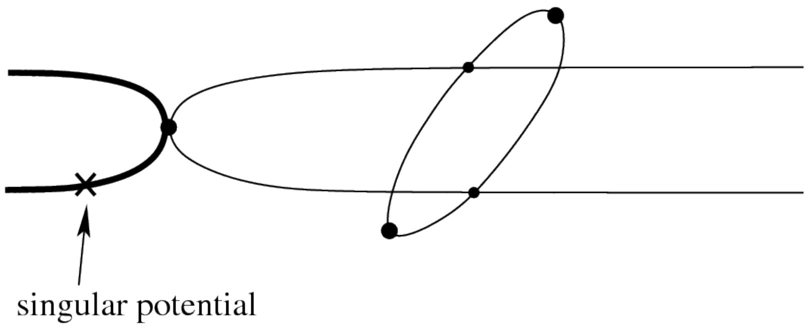
Контур κ_0 состоит из 2-х компонент: бесконечной и конечной. В этом случае имеется ровно один полюс γ: в регулярном случае он лежит в конечной лакуне и мы имеем сдвинутый оператор Ламе-Эрмита, в сингулярном случае он лежит в бесконечной лакуне и мы имеем стандартный оператор Ламе-Эрмита. В обоих случаях спектр – объединение 2 вещественных интервалов: $[E_1, E_2]\bigcup[E_3, \infty]$ (проекция κ_0), однако собственные функции и функциональные пространства на x-прямой драматически отличаются.

2) Пусть E_1 вещественно, $E_3 = \overline{E_2}$:



Решетка периодов в этом случае ромбическая.





κ_0 нарисовано тонкими линиями.

Спектр задачи на всей прямой совпадает с проекцией контура κ_0 на E-плоскость. Он содержит комплексную дугу, соединяющую $E_2, E_3 = \bar{E}_2$.

Спектральный смысл сингулярных операторов указанного типа на всей прямой ранее не обсуждался.

Прямое и обратное спектральное преобразование

Введем следующую “спектральную меру” для $\lambda = (E, \pm) \in \Gamma$
$\Psi^*(\lambda, x) = \Psi(\sigma\lambda, x)$; $\gamma_j = (\lambda_j, \mu_j)$ – **полюса**,

$$d\mu = \frac{(E-\lambda_1)\dots(E-\lambda_g)dE}{2\sqrt{(E-E_1)\dots(E-E_{2g+1})}},$$

Для любой гладкой функции $\phi(\lambda), \lambda \in \kappa_0$, достаточно хорошо убывающей при $\lambda \to P$, мы определяем

Спектральное преобразование:

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\kappa_0} \phi(\lambda)\Psi^*(\lambda, x)d\mu(\lambda) \qquad (1)$$

и обратное Спектральное преобразование:

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(\lambda)\Psi(\lambda, x)dx \qquad (2)$$

Мы назовем их преобразованиями Фурье, если $\lambda_j = \infty$. В этом случае $d\mu^{Fourier} = dE/2\sqrt{(E-E_1)\ldots(E-E_{2g+1})}$, и наш базис обладает хорошими мультипликативными свойствами.
В регулярном случае спектральное преобразование – изометрия прстранств $L^2(\kappa_0)$ и $L^2(\mathbb{R})$ со скалярными призведениями:

$$< \psi_1, \psi_2 >_{\kappa_0} = \int_{\kappa_0} \psi_1(\lambda)\overline{\psi}_2(\lambda)d\mu(\lambda),$$

$$< f_1, f_2 >_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\overline{f}_2(x)dx.$$

(Здесь “мера” $d\mu$ – стандартная “спектральная плотность”
$1/2\chi_R(E,x_0), \chi = \chi_R + i\chi_I = \Psi'/\Psi$.)

Сингулярные потенциалы:
1) Формула для спектрального преобразования остается неизменной; формула для обратного спектрального преобразования продолжает действовать после естественной регуляризации.
2) Как и в регулярном случае, спектральное преобразование – изометрия , но уже пространств с индефинитной метрикой, описанной ниже.
Все особенности имеют вид

$$u(x) = n_j(n_j+1)/(x-x_j)^2 + O(1), n_j \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Функция $\Psi(\lambda, x)$ мероморфна по x. Для всех $\lambda', \lambda'' \in \Gamma$ все вычеты произведения $\Psi(\lambda', x)\Psi(\lambda'', x)$ равны $\mathbf{0}$.

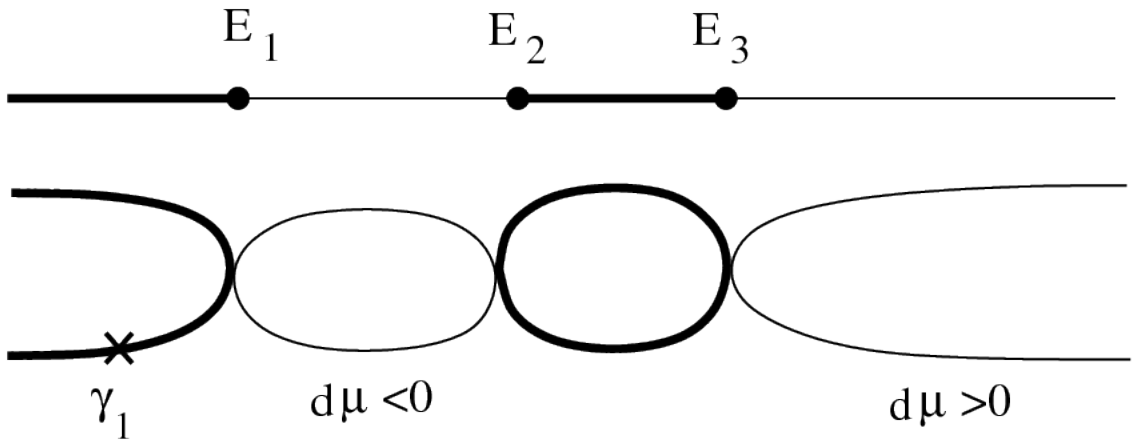
Данные рассеяния для потенциалов с особенностями вида $2/x^2$ были построены в работе:
В.А.Аркадьев, А.К.Погребков, М.К.Поливанов, "Сингулярные решения уравнения КдВ и метод обратной задачи" *Записки научных семинаров ЛОМИ*, 133, Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика, (1984), 17–37.
Все вычеты в формулах для обратного преобразования Фурье равны 0.
Наша регуляризация: Если мы встречаем особенность подинтегрального выражения, мы обходим ее в комплексной области. Обходить можно сверху и снизу – результат будет одним и тем же.

Скалярное произведение на римановых поверхностях (на пространстве функций на κ_0) дается формулой:

$$< \psi_1, \psi_2 >_{\kappa_0} = \int_{\kappa_0} \psi_1(\lambda)\overline{\psi}_2(\tau\lambda) d\mu$$

1) Все точки ветвления вещественны, τ действует тривиально на κ_0, но форма $d\mu$ отрицательна на части контуров. Для преобразования Фурье $d\mu^{Fourier}/dp < 0$ на $[(g+1)/2]$ конечной компоненте контура κ_0.

2) Есть пары комплексно сопряженных точек ветвления, τ действует нетривиально на κ_0: скалярное произведение нелокально, и поэтому индефинитно.



Скалярное произведение на пространстве функций переменной $x \in \mathbb{R}$

$$< f_1, f_2 >_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\overline{f}_2(\bar{x})dx$$

Эти функции принадлежат образу спектрального преобразования. Для случая общего положения все особенности имеют вид $u(x) \sim 2/(x-x_j)^2$. Локально для функций f_1, f_2 имеем:

$$f(x) = d_{-1}/(x-x_j) + d_1(x-x_j) + \dots$$

Мы пишем $\bar{x}$ вместо x в скалярном произведении, чтобы подинтегральное выражение было голоморфным. Все вычеты подинтегрального выражения равны 0, поэтому можно обходить особенности в комплексной области как сверху, так и снизу. Это скалярное произведение индефинитно.

Пространства Понтрягина-Соболева (PS): Любая функция вещественной переменной $f(x)$ может быть представлена как

$$f(x) = \int\limits_0^{2\pi/T} \hat{f}(p,x)dp,$$

где $f(p,x+T) = \exp(ipT)f(p,x)$. Тем самым $L^2(\mathbb{R})$ представлено как прямой интерал пространств Блоха-Флоке $B_\varkappa$:

$$f(x) \in B_\varkappa \quad \text{if} \quad f(x+T) = \varkappa f(x), \quad |\varkappa| = 1.$$

Наше скалярное произведение имеет конечное число r отрицательных квадратов на каждом из пространств $B_\varkappa$, то есть это – пространства PS. Для случая Фурье $r = [(g+1)/2]$. Этот результат позволяет оценить число r' особенностей функции $u(x)$ на вещественной прямой.

Пример: деформации под действием КдФ. Пусть:

$$u(x,0) = g(g+1)\wp(x), u(x,0) = g(g+1)/x^2, g \in Z$$

Соответствующие решения КдФ имеют вид:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{g(g+1)/2} 2\wp(x - x_j(t)).$$

Задача: вычислить число r' вещественных полюсов $x_j(t)$. Ответ не изменится, если рассмотреть $g(g+1)/x^2$ вместо $g(g+1)\wp(x)$

Наши аргументы:

При $t = 0$ число r отрицательных квадратов в нашем скалярном произведении равно $[(g+1)/2]$. Число отрицательных квадратов устойчиво, поэтому мы имеем $r' \geq [(g+1)/2]$ вещественных полюсов. Для многих случаев мы численно проверили равенство $r' = r$.

Существование по крайней мере одного вещественного полюса было доказано много лет назад:

Adler M., Moser Ju. On a class of polynomials connected with the Korteweg-de Vries Equation. *Comm. Math. Phys.* (1978) pp 1-30.

Заключительное замечание: Сингулярные собственные функции Блоха-Флоке возникают в теории $k+1$-частичного оператора Мозера-Калоджеро с эллиптическим потенциалом если константа связи равна $n(n+1), n \in \mathbb{Z}$. Они образуют k-мерное комплексное алгебраическое многообразие. Для $k > 1$ аналогов результата Эрмита пока не удалось получить: пока не построено не одной функции, обслуживающей дискретный спектр в области, ограниченной полюсами потенциала. Наш случай отвечает $k = 1$. Скорее всего при $k > 1$ эти семейства собственных функций обслуживают спектральную задачу в некотором индефинитном скалярном произведении для подходящих функций на всем пространстве $\mathbb{R}^k$.